TITLE:

Hamiltonの方程式の解のconcentrationな振舞いについて(変分問題とその周辺)

AUTHOR(S):

中内, 伸光

CITATION:

中内, 伸光. Hamiltonの方程式の解のconcentrationな振舞いについて(変分問題とその周辺). 数理解析研究所講究録 1991, 770: 105-109

ISSUE DATE:

1991-11

URL:

http://hdl.handle.net/2433/82362

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第770巻 1991年 105-109

Hamiltonの方程式の解のconcentrationな振舞いについて

中内伸光(山口大学・理学部)
Nakauchi Nobumitsu

近年、concentrationとか、bubblingという現象が、幾何や物理などに現れる変分問題や、それに付随する微分方程式に見られるようになってきました。このノートでは、計量の変形の方程式であるHamiltonの方程式の解について、ある条件のもとで、concentrationが起こることを述べます。

多様体 M 上のEinstein計量は、変分法的観点からは、計量 g のスカラー曲率 $Scal_g$ の積分で定義される汎関数

$$\mathcal{F}(g) := \int_M Scal_g \, dv_g \qquad (dv_g \text{ は volume element})$$

の、体積をnormalizeした M 上の計量全体での停留点として特徴づけられます。このfunctionalのgradient flowは次で与えられます:

Gradient flow equation

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,Ric_g + \frac{2}{n}\,Scal_g\,g\,.$$

ここで、Ric_g は g のリッチ曲率を表します。Einstein計量を求めるという意味からも、与えられた計量を、このgradient flowに沿って変形していきたい訳ですが、残念にも、この方程式は、short timeでも一般には解けません。左辺の第2項においてbackward heat equationの側面を持っているか

らです。これは、ちょうど、conformal deformation の方向の gradient の成分に対応しています。Hamilton は、この困難を避けるために、今では Ricci flow equation とも呼ばれる次のような modified equation を採用しました。(Hamilton [1]):

Hamilton's (normalized) equation

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,Ric_g + \frac{2}{n}\,s_g\,g\,.$$

ここで、s_g は、スカラー曲率の平均、即ち、

$$s_g = \frac{\displaystyle\int_M Scal_g\,dv_g}{\displaystyle\int_M dv_g}.$$

です。この方程式は、 gradient flow の右辺の第 2 項を取り除いた方程式:

Hamilton's (unnormalized) equation

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,Ric_g$$

を、体積を normalize することにより得られます。これらの 2 つの方程式、normalized と unnormalized の方程式の解は、次の様な変換により、互いにうつり合います:

$$(*) \qquad \begin{cases} g^u = \psi(t^n)\,g^n \\ t^u = \displaystyle\int^{t^n} \psi(t^n)\,dt^n\,, \end{cases}$$

ここで、上付添字の "u" と "n" は、それぞれ "unnormalized" と "normalized" を表しています。これは、ご覧の通り、空間方向の conformal transformation

と時間方向の chang of parameter のペアです。このノートでは、以下、記述の簡単さのために、unnormalized equation を取り扱います。したがって、“解”と言ったときは、特に断らない限り、unnormalized equation の解ということにします。

Short time existence

一般に、任意の初期計量に対して、short time での解が存在します。

そこで、

Long time existence

“long-time solution” とは、“この flow の orbit が、Einstein point（あるいは、Einstein-like point）に到達するような解” という意味とします。long-time solution の存在については、主に次の 3 つの結果が知られています。

（1）（Hamilton [1]）：

M の次元は 3 で、初期計量 g_0 のリッチ曲率は正であるとする。このとき、long-time solution g_t が存在して、さらに、その解 g_t は、時間 t を最大存在時間 T に近づけると、定曲率計量に収束する。

（2）（Hamilton [2]）：

M の次元は 4 で、初期計量 g_0 の curvature operator は正であるとする。このとき、long-time solution g_t が存在して、さらに、その解 g_t は、時間 t を最大存在時間 T に近づけると、定曲率計量に収束する。

（3）（Huisken [3], Margerin [4], Nishikawa [6]）：

M の次元は一般だが、初期計量 g_0 がある意味で、定曲率計量に十分近いとする。（もう少し正確に言えば、初期計量の scalar tensor part が、Weyl tensor part と、Ricci-less tensor part より十分小さい。）このとき、long-time solution g_t が存在して、さらに、その解 g_t は、時間 t を最大存在時間 T に近づけると、定曲率計量に収束する。

Einstein 計量を本来許容しない多様体を考えてみればわかるように、一般には、long time での解は存在しません。即ち、Einstein metric に近づくまでに、解が存在しなくなる訳です。そこで、次の疑問が生じます：

Question： 時間 t を、最大存在時間 T に近づいたとき、解 g_t には、何が起こっているか？

この疑問に対する部分的解答として次のような現象が観察されます：

定理 (Nakauchi [5]). M を $n(\geq 5)$ 次元コンパクト可微分多様体、g_t を *Hamilton* 方程式の解で、初期計量 g_0 の *curvature operator* は正であるものとする。また、$T(<\infty)$ は、最大存在時間とする。次の 2 つの条件を仮定する。

(条件A) $$\int_{T-\delta}^{T}\int_{M} \| R_{g_t} \|^{\frac{n}{2}+1} dv_{g_t}\, dt < \infty \qquad (\exists \delta > 0).$$

ここで、R_g は *curvature tensor* とする。

(条件B) $$\lim_{t \to T} Vol_{g_t}(M) > 0.$$

但し、$Vol_g(M)$ は、計量 g に関する M の体積とする。このとき、

(i) M 上の有限個の点 $x_1, \ldots, x_k$ からなる集合 $\mathcal{S}$、

(ii) 実数 $a_1, \ldots, a_k$

が存在して、つぎの 2 つの条件を満たす：

(1) 計量 g_t は $t \to T$ のとき、$M - \mathcal{S}$ 上である計量 g_T に収束する。

(2) M 上の測度 $\| R_{g_t} \|^{\frac{n}{2}} dv_{g_t}$ は、$t \to T$ のとき、測度 $\| R_{g_T} \|^{\frac{n}{2}} dv_{g_T} + \Sigma_{j=1}^{k} a_i \delta_{x_j}$ に弱収束する。ここで、δ_{x_j} は、点 x_j に台をもつ *Dirac mass* である。

注意.

(1) （条件A）における積分は、変換 (*) で invariant である。

(2) （条件A）において、$\frac{n}{2}+1=\frac{n+2}{2}$ は、この空間時間積分（時間方向は、2乗の scaling ）に対して、"critical exponent" である。空間積分に関しては、$\frac{n}{2}$ が critical である。

(3) unnormalized equation の解 g_t に対して、$Vol_{g_t}(M)$ は単調減少であり、$\lim_{t\to T} Vol_{g_t}(M)$ は常に存在する。

参考文献

[1] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 255-306.

[2] R. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature tensor*, J. Diff. Geom. 24 (1986), 153-179.

[3] G. Huisken, *Ricci deformation of the metric on a Riemannian manifold*, J. Diff. Geom. 21 (1985), 47-62.

[4] C. Margerin, *Pointwise pinched manifolds are space forms*, Proc. Symp. Pure Math. 44 (1986), 307-328.

[5] N. Nakauchi, *Concentration behavior in solutions of Hamilton's evolution equation*, preprint.

[6] S. Nishikawa, *Deformation of Riemannian metrics and manifolds with bounded curvature ratios*, Proc. Symp. Pure Math. 44 (1986), 343-352.